GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

SĂ ÎNVĂȚĂM MATEMATICĂ FĂRĂ PROFESOR

CLASA A IX – A

PROFIL ȘTIINȚE ALE NATURII

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021

CUPRINS

1. Mulțimi și elemente de logică matematică
1.1 Mulțimea numerelor reale
1.1.1 Numere raționale
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. **Mulțimea numerelor naturale**: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, \}$.
2. **Mulțimea numerelor întregi**: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, \}$.
3. a) **Număr rațional** = mulțimea tuturor fracțiilor ordinare **echivalente** cu o fracție ordinară dată.

b) Fracțiile ordinare $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ unde $m, n, p, q \in \mathbf{Z}, n \neq 0, q \neq 0$ sunt **echivalente** dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$.

Exemplu. Fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente deoarece $3 \cdot 21 = = 7 \cdot 9 = 63$.

c) **Mulțimea numerelor raționale**: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$.

În mod evident avem incluziunile: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

4. a) **Fracție ireductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele (cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1).

Exemple. Fracțiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile deoarece 5 și 11, respectiv 8 și 13 sunt prime între ele.

b) **Fracție reductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt multipli de un număr $p \neq 1$.

Exemple. Fracțiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile, deoarece 6 și 14 sunt multipli de 2, iar 9 și 12 sunt multipli de 3.

5. **Fracție zecimală**. Fiind dat numărul rațional $\frac{m}{n}$, prin împărțirea lui m la n se obține fracția zecimală $a, a_1a_2a_3\cdots$, unde a este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3 \cdots$ sunt cifre (iau valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$)

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr finit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală finită**.

Exemple. a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$ b) $-\frac{15}{4} = -3{,}75$ c) $\frac{125}{8} = 15{,}625$.

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr infinit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală infinită**.

Exemple. a) $\frac{11}{3} = 3{,}666 \cdots = 3,(6)$

b) $-\frac{17}{6} = -2{,}8333 \cdots = -2{,}8(3)$.

Fracțiile zecimale infinite care reprezintă numere raționale au o grupă de cifre care se repetă de o infinitate de ori și care se numește **perioadă**,

În exemplul de la a) perioada este (6), începe după virgulă și fracția zecimală se numește **periodică simplă**.

În exemplul de la b) perioada este (3), între virgulă și perioadă există cifra 8 și fracția zecimală se numește **periodică mixtă**.

Pentru a scrie o fracție zecimală periodică sub forma unei fracții ordinare procedăm conform regulior învățate în gimnaziu:

a) $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) $3,(21) = 3 + \frac{21}{99} = 3 + \frac{7}{33} = \frac{106}{33}$.

c) $2{,}12(3) = 2 + \frac{123-12}{900} = 2 + \frac{111}{900} = 2 + \frac{37}{300} = \frac{637}{300}$

b) Exerciții și probleme rezolvate

1. Stabiliți care din relațiile de mai jos sunt adevărate:

a) $-2 \in \mathbf{N}$ b) $12 \in \mathbf{Z}$ c) $\frac{2}{3} \in \mathbf{Z}$ d) $2,(3) \in \mathbf{Q}$

Soluție. a) $-2 \notin \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația nu este adevărată.

b) $12 \in \mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația este adevărată.

c) $\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația nu este adevărată.

d) $2,(3) = 2 + \frac{3}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \in \mathbf{Q}$.

2. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{1}{2}$ și $\frac{29}{3}$.

Soluție. Avem: $\frac{1}{2} = 0{,}5$ și $\frac{29}{3} = 9,(6)$. Numerele căutate sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Determină 6 numere raționale cuprinse între:

a) -1 și 2 b) $-\frac{3}{4}$ și 5 c) 4 și $\frac{25}{4}$.

Soluție. a) $0, 1 \in \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$. Alte 4 numere iraționale pot fi:
$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

4. Determină $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracțiile următoare să fie echivalente cu numere naturale:

a) $\frac{6}{n+1}$ b) $\frac{n+6}{n+2}$ c) $\frac{2n+9}{n+3}$

Soluție. a) Fracția $\frac{6}{n+1}$ este echivalentă cu un număr natural dacă $n + 1$ este divizor al lui 6. Divizorii lui 6 sunt: 1, 2, 3, 6.
$n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0; n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1; n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$ și $n + 1 = 6 \Rightarrow n = 5$. Deci $n = 0, 1, 2, 5$.

b) $\frac{n+6}{n+2} = \frac{n+2+4}{n+2} = 1 + \frac{4}{n+2}$. În continuare se procedează ca la a) și se obține $n = 0, 2$.

c) $\frac{2n+9}{n+3} = \frac{2n+6+3}{n+3} = \frac{2(n+3)+3}{n+3} = 2 + \frac{3}{n+3}$. Se procedează ca la a) și se obține $n = 0$.

5. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\frac{n}{n+4}$ să fie echivalentă cu $\frac{3}{5}$.

Soluție. Fracția $\frac{n}{n+4}$ este echivalentă cu $\frac{3}{5}$ dacă $\frac{n}{n+4} = \frac{3}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5n = 3n + 12 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$.

6. Să se arate că fracția $\frac{3+6+9+\cdots+150}{4+8+12+\cdots+200}$ este reductibilă.

Soluție. $3 + 6 + 9 + \cdots + 150 = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$ și
$4 + 8 + 12 + \cdots + 200 = 4(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$.
Fracția este reductibilă deoarece atât numărătorul cât și numitorul sunt multipli de numărul $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$.

7. Arătați că fracția $\frac{n(n+1)}{2n+4}$ este reductibilă.

Soluție. $n(n + 1)$ se divide cu 2, deoarece n și $n + 1$ sunt consecutive și $2n + 4 = 2(n + 2)$ se divide cu 2.

Atunci fracția este reductibilă.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Dintre relațiile de mai jos:

a) $-2 \in \mathbf{Z}$ b) $-5 \in \mathbf{N}$ c) $\frac{5}{7} \in \mathbf{N}$ d) $\frac{3}{8} \in \mathbf{Q}$ e) $-9 \in \mathbf{Q}$

adevărate sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

2. Dintre relațiile de mai jos:

a) $-5 \in \mathbf{N}$ b) $7 \in \mathbf{N}$ c) $7,(3) \in \mathbf{N}$ d) $\frac{7}{8} \in \mathbf{Z}$ e) $2{,}5 \in \mathbf{Q}$

adevărate sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

3. Fie perechile de fracții:

a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{9}$; c) $\frac{1}{3}$ și $\frac{7}{15}$; d) $\frac{5}{2}$ și $\frac{20}{8}$; e) $\frac{4}{7}$ și $\frac{7}{12}$.

Arătați că echivalente sunt un număr de perechi egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

4. Dintre fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{11}{8}, \frac{11}{31}, \frac{15}{25}, \frac{17}{32}, \frac{27}{45}, \frac{12}{35}$ echivalente cu fracția $\frac{6}{10}$ sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

5. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{11}{2}$ și $\frac{45}{4}$. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

6. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $-\frac{17}{3}$ și $\frac{71}{8}$. Numărul lor este egal cu:

7 **8** **9** **10** **11**

7. Determină toate fracțiile de forma $\frac{n}{2}$ cuprinse între numerele naturale 3 și 9. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

8. Fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ sunt echivalente pentru valoarea lui x egală cu: **10** **11** **12** **13** **14**

9. Fracțiile $\frac{4}{9}$ și $\frac{x+3}{27}$ sunt echivalente pentru valoarea lui x egală cu: **7** **8** **9** **10** **11**

10. Dintre fracțiile: $\frac{2}{3}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}, \frac{10}{8}, \frac{11}{33}, \frac{15}{17}, \frac{17}{31}, \frac{27}{36}, \frac{15}{35}$ reductibile sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

11. Dintre fracțiile: $\frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{11}{7}, \frac{12}{32}, \frac{15}{35}, \frac{17}{34}, \frac{27}{41}$, ireductibile sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

12. Transformați fracția ordinară $\frac{11}{3}$ în fracție zecimală. Arătați că a zecea zecimală este egală cu:

3 **4** **5** **6** **7**

13. Transformați fracția ordinară $\frac{13}{6}$ în fracție zecimală. Arătați că a zecea opta este egală cu:

3 **4** **5** **6** **7**

14. Fracția $\frac{n+9}{n+3}$ devine număr natural pentru un număr de valori ale lui n egal cu: **1** **2** **3** **4** **5**

15. Fracția $\frac{n-9}{n-3}$ devine număr întreg pentru un număr de valori natural ale lui n egal cu: **5** **6** **7** **8** **9**

16. Arătați că fracția $\frac{n^2+n}{4n+2}$ este reductibilă. Cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică este egală:

1 **2** **3** **4** **5**

17. Arătați că fracția $\frac{n^2+3n+8}{n^2-n+6}$ este reductibilă. Cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică este egală:

1 **2** **3** **4** **5**

1.1.2 Numere iraționale. Numere reale

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Număr irațional = numărul reprezentat de o fracție zecimală, infinită, neperiodică.

Exemple. a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135\cdots$ b) $\sqrt{7} = 2{,}6457513\cdots$

2. Notăm **mulțimea tuturor numerelor iraționale** cu **R − Q**.

3. Număr real = orice număr rațional sau irațional.

4. Notăm **mulțimea tuturor numerelor reale** cu **R** și avem egalitatea $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \varnothing$.

b) Probleme rezolvate

1. Precizați patru valori naturale pentru n astfel încât numărul $\sqrt{n^2 - n + 1}$ să fie irațional.

Soluție. Pentru $n = 2$ obținem $\sqrt{2^2 - 2 + 1} = \sqrt{3} = 1{,}732\cdots$.
Pentru $n = 3$ obținem $\sqrt{3^2 - 3 + 1} = \sqrt{7} = 2{,}645\cdots$.
Pentru $n = 4$ obținem $\sqrt{4^2 - 4 + 1} = \sqrt{13} = 3{,}605\cdots$.
Pentru $n = 5$ obținem $\sqrt{5^2 - 5 + 1} = \sqrt{21} = 4{,}582\cdots$.

2. Determinați $n \in \mathbf{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n^2 + 5}$ este rațional.

Soluție. Fie $m \in \mathbf{N}$ astfel încât să avem egalitatea:
$\sqrt{n^2 + 5} = m \Rightarrow n^2 + 5 = m^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow (m + n)(m - n) = 5 \Rightarrow m + n = 5, m - n = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 3, n = 2$. Deci valoarea lui n este 2.

3. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ numerele de forma $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

Soluție. Dacă n este par, $n = 2k \Rightarrow 5n + 2 = 10k + 2$ și are deci ultima cifră egală cu 2.

Dacă n este impar, $n = 2k + 1 \Rightarrow 5n + 2 = 5(2k + 1) + 2 = 10k + 7$ și are decă ultima cifră egală cu 7.

Numerele de forma $5n + 2$ au ultima cifră 2 sau 7 și nu pot fi pătrate perfecte. Atunci numerele $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Arătați că numere raționale de forma $\sqrt{n + 1}$, unde n este număr natural mai mic decât 10 sunt:

unu **două** **trei** **patru** **cinci**

2. Arătați că numere iraționale de forma $\sqrt{2n + 1}$, unde n este număr natural pătrat perfect de 2 cifre sunt:

unu **două** **șase** **patru** **cinci**

3. Calculați $\sqrt{5}$ cu 7 zecimale. Cifra 6 apare printre aceste zecimale de un număr de ori egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

4. Fie numerele: $\sqrt{16}, \sqrt{99}, \frac{3}{4}$, 1,(3), $\sqrt{121}, \sqrt{44}, \sqrt{75}$. Dintre acestea, numere iraționale sunt:

unu **două** **trei** **patru** **cinci**

5. Numărul natural de o cifră n, astfel încât numărul $\sqrt{n + 4}$ să fie rațional este:

3 **4** **5** **6** **7**

6. Numărul natural de două cifre n, astfel încât numărul $\sqrt{n + 65}$ să fie natural de o cifră este:

13 **16** **25** **46** **57**

7. Determină toate numerele naturale de 2 cifre n, astfel încât numărul $\sqrt{n + 10}$ să fie rațional. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

8. Numărul natural n pentru care $\sqrt{n^2 + 9}$ este rațional este:

3 **4** **5** **6** **7**

9. Determină toate numerele naturale n, astfel încât $\sqrt{n + 6}$ să fie rațional și $\sqrt{n + 6} \leq 6$. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

1.1.3 Operații algebrice cu numere reale
Puteri cu exponent întreg.
a) Noțiuni teoretice și exemple

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

1) Asociativitatea: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $(\forall)x,y,z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $x+y = y+x$ $(\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 0: $x+0 = 0+x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element opus: : $x+(-x) = (-x)+x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x.

b) Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz)$ $(\forall)x,y,z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $xy = yx$ $(\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element inversabil : $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ $(\forall)\, x \in \mathbf{R},\ x \neq 0$;
numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x.

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y+z) = xy + xz \ (\forall)x,y,z \in \mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

a) $x - y = x + (-y), (\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
b) $x : y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$.

d) Formule de calcul prescurtat

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

7) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$;
8) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
9) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
10) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$;
11) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}$, impar.

e) Alte formule algebrice utile

1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;
2) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$;
3) $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2$;
4) $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
5) $a^6 + b^6 = (a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2)$;
6) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$;
7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$;
8) a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.
9) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

f) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$.