

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**SĂ ÎNVĂȚĂM
MATEMATICĂ
FĂRĂ PROFESOR
CLASA A IX – A
PROFIL ȘTIINȚE ALE NATURII**

**EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021**

CUPRINS

	Enunțuri Rezolvări	
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	188
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	188
1.1.1 Numere raționale	5	188
1.1.2 Numere iraționale. Numere reale	10	189
1.1.3 Operații algebrice cu numere reale.		
Puteri cu exponent întreg	12	191
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	18	192
1.1.5 Modulul unui număr real	20	193
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	24	195
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a		
unui număr real	27	196
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale .	29	197
1.2 Elemente de logică matematică	33	197
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori.		
Operații logice elementare	33	197
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de		
logică matematică cu operațiile și relațiile cu		
mulțimi	38	199
1.2.3 Tipuri de raționamente logice. Metoda		
reducerii la absurd. Metoda inducției matematice	43	200
1.2.4 Probleme de numărare	47	201
1.3 Teste grilă de autoevaluare	49	202
Testul 1	49	202
Testul 2	50	202
Testul 3	51	203
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor		
naturale. Șiruri. Progresii aritmetice.		
Progresii geometrice	52	204
2.1 Șiruri	52	204
2.2 Progresii aritmetice	55	205
2.3 Progresii geometrice	60	207
2.4 Teste grilă de autoevaluare	64	208
Testul 1	64	208
Testul 2	65	209

3. Funcții, lecturi grafice	66	209
3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m, m \in \mathbf{R}$	66	209
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imaginea unei funcții	69	210
3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice	71	211
3.4 Proprietăți ale funcțiilor numerice; mărginire, monotonie	74	212
3.5 Proprietăți ale funcțiilor numerice; paritate, imparitate, periodicitate	77	213
3.6 Compunerea funcțiilor	79	214
3.7 Teste grilă de autoevaluare	83	216
Testul 1	83	216
Testul 2	84	217
4. Funcția de gradul I	85	217
4.1 Ecuația de gradul I	85	217
4.2 Funcția afină. Funcția de gradul I. Grafic. Monotonie.	87	219
4.3 Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I	90	219
4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	94	220
4.5 Sisteme de inecuații de gradul I	97	221
4.6 Teste grilă de autoevaluare	99	222
Testul 1	99	222
Testul 2	100	222
5. Funcția de gradul al doilea	101	223
5.1 Ecuația de gradul al doilea.	101	223
5.2 Funcția de gradul al doilea. Monotonie. Punct de extrem. Intersecția funcției cu axele de coordonate. Graficul funcției	108	225
5.3 Semnul funcției de gradul al II-lea. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	114	227
5.4 Teste de evaluare	119	228
Testul 1	119	228
6. Vectori în plan	120	229
6.1 Segmente orientate	120	229
6.2 Vectori. Operații cu vectori	124	230
6.3 Vectori coliniari. Descompunerea unui vector		

după doi vectori dați, necoliniari și nenuli	130	231
6.4 Coliniaritate, concurență, paralelism. Teorema bisectoarei, relația lui Sylvester, teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.	134	232
6.5 Teste de evaluare	141	234
Testul 1	141	234
7. Trigonometrie și aplicațiile trigonometriei în geometrie	142	235
7.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce ..	142	235
7.2 Rezolvarea triunghiului dreptunghic ...	144	235
7.3 Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	149	238
7.4 Reducerea la primul cadran	155	239
7.5 Formule de legătură între funcțiile trigonometrice	159	240
7.6 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	162	241
7.7 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu, ale jumătății unui unghi	166	242
7.8 Formule pentru transformarea sumei sau diferenței de funcții trigonometrice în produs	171	244
7.9 Teste grilă de autoevaluare	175	245
Testul 1	175	245
Testul 2	176	246
8. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană	177	248
8.1 Produsul scalar a doi vectori	177	248
8.2 Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Calcularea razei cercului înscris, circumscris și exâncris în triunghi. Calcul de arii	180	249
8.3 Teste grilă de autoevaluare	186	252
Testul 1	186	252
Testul 2	187	253

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Numere raționale

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. **Mulțimea numerelor naturale:** $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2. **Mulțimea numerelor întregi:** $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

3. a) **Număr rațional** = mulțimea tuturor fracțiilor ordinare **echivalente** cu o fracție ordinară dată.

b) Frațiile ordinare $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ unde $m, n, p, q \in \mathbf{Z}, n \neq 0, q \neq 0$ sunt **echivalente** dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$.

Exemplu. Frațiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente deoarece $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 = 63$.

c) **Mulțimea numerelor raționale:** $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$.

În mod evident avem incluziunile: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

4. a) **Fracție ireductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele (cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1).

Exemple. Frațiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile deoarece 5 și 11, respectiv 8 și 13 sunt prime între ele.

b) **Fracție reductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt multipli de un număr $p \neq 1$.

Exemple. Frațiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile, deoarece 6 și 14 sunt multipli de 2, iar 9 și 12 sunt multipli de 3.

5. **Fracție zecimală.** Fiind dat numărul rațional $\frac{m}{n}$, prin împărțirea lui m la n se obține fracția zecimală $a, a_1 a_2 a_3 \dots$, unde a este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3 \dots$ sunt cifre (iau valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$)

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr finit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală finită**.

Exemple. a) $\frac{7}{5} = 1,4$ b) $-\frac{15}{4} = -3,75$ c) $\frac{125}{8} = 15,625$.

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr infinit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală infinită**.

Exemple. a) $\frac{11}{3} = 3,666 \dots = 3, (6)$

b) $-\frac{17}{6} = -2,8333 \dots = -2,8(3)$.

Fracțiile zecimale infinite care reprezintă numere raționale au o grupă de cifre care se repetă de o infinitate de ori și care se numește **perioadă**,

În exemplul de la a) perioada este (6), începe după virgulă și fracția zecimală se numește **periodică simplă**.

În exemplul de la b) perioada este (3), între virgulă și perioadă există cifra 8 și fracția zecimală se numește **periodică mixtă**.

Pentru a scrie o fracție zecimală periodică sub forma unei fracții ordinare procedăm conform regulilor învățate în gimnaziu:

a) $0, (6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) $3, (21) = 3 + \frac{21}{99} = 3 + \frac{7}{33} = \frac{106}{33}$.

c) $2,12(3) = 2 + \frac{123-12}{900} = 2 + \frac{111}{900} = 2 + \frac{37}{300} = \frac{637}{300}$

b) Exerciții și probleme rezolvate

1. Stabiliți care din relațiile de mai jos sunt adevărate:

a) $-2 \in \mathbf{N}$ b) $12 \in \mathbf{Z}$ c) $\frac{2}{3} \in \mathbf{Z}$ d) $2, (3) \in \mathbf{Q}$

Soluție. a) $-2 \notin \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, deci relația nu este adevărată.

b) $12 \in \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, deci relația este adevărată.

c) $\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, deci relația nu este adevărată.

d) $2, (3) = 2 + \frac{3}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \in \mathbf{Q}$.

2. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{1}{2}$ și $\frac{29}{3}$.

Soluție. Avem: $\frac{1}{2} = 0,5$ și $\frac{29}{3} = 9, (6)$. Numerele căutate sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Determină 6 numere raționale cuprinse între:

a) -1 și 2 b) $-\frac{3}{4}$ și 5 c) 4 și $\frac{25}{4}$.

Soluție. a) $0, 1 \in \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$. Alte 4 numere iraționale pot fi: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

4. Determină $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracțiile următoare să fie echivalente cu numere naturale:

a) $\frac{6}{n+1}$ b) $\frac{n+6}{n+2}$ c) $\frac{2n+9}{n+3}$

Soluție. a) Frația $\frac{6}{n+1}$ este echivalentă cu un număr natural dacă $n+1$ este divizor al lui 6. Divizorii lui 6 sunt: 1, 2, 3, 6.

$n+1 = 1 \Rightarrow n = 0$; $n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$; $n+1 = 3 \Rightarrow n = 2$ și $n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$. Deci $n = 0, 1, 2, 5$.

b) $\frac{n+6}{n+2} = \frac{n+2+4}{n+2} = 1 + \frac{4}{n+2}$. În continuare se procedează ca la a) și se obține $n = 0, 2$.

c) $\frac{2n+9}{n+3} = \frac{2n+6+3}{n+3} = \frac{2(n+3)+3}{n+3} = 2 + \frac{3}{n+3}$. Se procedează ca la a) și se obține $n = 0$.

5. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\frac{n}{n+4}$ să fie echivalentă cu $\frac{3}{5}$.

Soluție. Frația $\frac{n}{n+4}$ este echivalentă cu $\frac{3}{5}$ dacă $\frac{n}{n+4} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5n = 3n + 12 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$.

6. Să se arate că fracția $\frac{3+6+9+\dots+150}{4+8+12+\dots+200}$ este reductibilă.

Soluție. $3 + 6 + 9 + \dots + 150 = 3(1 + 2 + 3 + \dots + 50)$ și $4 + 8 + 12 + \dots + 200 = 4(1 + 2 + 3 + \dots + 50)$.

Fracția este reductibilă deoarece atât numărătorul cât și numitorul sunt multipli de numărul $1 + 2 + 3 + \dots + 50$.

7. Arătați că fracția $\frac{n(n+1)}{2n+4}$ este reductibilă.

Soluție. $n(n+1)$ se divide cu 2, deoarece n și $n+1$ sunt consecutive și $2n+4 = 2(n+2)$ se divide cu 2.

Atunci fracția este reductibilă.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Dintre relațiile de mai jos:

a) $-2 \in \mathbf{Z}$ b) $-5 \in \mathbf{N}$ c) $\frac{5}{7} \in \mathbf{N}$ d) $\frac{3}{8} \in \mathbf{Q}$ e) $-9 \in \mathbf{Q}$

adevărate sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

2. Dintre relațiile de mai jos:

a) $-5 \in \mathbf{N}$ b) $7 \in \mathbf{N}$ c) $7, (3) \in \mathbf{N}$ d) $\frac{7}{8} \in \mathbf{Z}$ e) $2,5 \in \mathbf{Q}$

adevărate sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

3. Fie perechile de fracții:

a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{9}$; c) $\frac{1}{3}$ și $\frac{7}{15}$; d) $\frac{5}{2}$ și $\frac{20}{8}$; e) $\frac{4}{7}$ și $\frac{7}{12}$.

Arătați că echivalente sunt un număr de perechi egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

4. Dintre fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{11}{8}, \frac{11}{31}, \frac{15}{25}, \frac{17}{32}, \frac{27}{45}, \frac{12}{35}$ echivalente cu

fracția $\frac{6}{10}$ sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

5. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{11}{2}$ și $\frac{45}{4}$. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

6. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $-\frac{17}{3}$ și $\frac{71}{8}$. Numărul lor este egal cu:

7 **8** **9** **10** **11**

7. Determină toate fracțiile de forma $\frac{n}{2}$ cuprinse între numerele naturale 3 și 9. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

8. Frațiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ sunt echivalente pentru valoarea lui x egală

cu: **10** **11** **12** **13** **14**

8

9. Frațiile $\frac{4}{9}$ și $\frac{x+3}{27}$ sunt echivalente pentru valoarea lui x egală

cu: **7** **8** **9** **10** **11**

10. Dintre fracțiile: $\frac{2}{3}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}, \frac{10}{8}, \frac{11}{33}, \frac{15}{17}, \frac{17}{31}, \frac{27}{36}, \frac{15}{35}$ reductibile

sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

11. Dintre fracțiile: $\frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{11}{7}, \frac{12}{32}, \frac{15}{35}, \frac{17}{34}, \frac{27}{41}$, ireductibile

sunt: **una** **două** **trei** **patru** **cinci**

12. Transformați fracția ordinară $\frac{11}{3}$ în fracție zecimală. Arătați că a zecea zecimală este egală cu:

3 **4** **5** **6** **7**

13. Transformați fracția ordinară $\frac{13}{6}$ în fracție zecimală. Arătați că a zecea opta este egală cu:

3 **4** **5** **6** **7**

14. Frația $\frac{n+9}{n+3}$ devine număr natural pentru un număr de valori ale lui n egal cu: **1** **2** **3** **4** **5**

15. Frația $\frac{n-9}{n-3}$ devine număr întreg pentru un număr de valori naturale ale lui n egal cu: **5** **6** **7** **8** **9**

16. Arătați că fracția $\frac{n^2+n}{4n+2}$ este reductibilă. Cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică este egală:

1 **2** **3** **4** **5**

17. Arătați că fracția $\frac{n^2+3n+8}{n^2-n+6}$ este reductibilă. Cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică este egală:

1 **2** **3** **4** **5**

9

1.1.2 Numere iraționale. Numere reale

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. **Număr irațional** = numărul reprezentat de o fracție zecimală, infinită, neperiodică.

Exemple. a) $\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$ b) $\sqrt{7} = 2,6457513 \dots$

2. Notăm **mulțimea tuturor numerelor iraționale** cu $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

3. **Număr real** = orice număr rațional sau irațional.

4. Notăm **mulțimea tuturor numerelor reale** cu \mathbf{R} și avem egalitatea $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \emptyset$.

b) Probleme rezolvate

1. Precizați patru valori naturale pentru n astfel încât numărul $\sqrt{n^2 - n + 1}$ să fie irațional.

Soluție. Pentru $n = 2$ obținem $\sqrt{2^2 - 2 + 1} = \sqrt{3} = 1,732 \dots$

Pentru $n = 3$ obținem $\sqrt{3^2 - 3 + 1} = \sqrt{7} = 2,645 \dots$

Pentru $n = 4$ obținem $\sqrt{4^2 - 4 + 1} = \sqrt{13} = 3,605 \dots$

Pentru $n = 5$ obținem $\sqrt{5^2 - 5 + 1} = \sqrt{21} = 4,582 \dots$

2. Determinați $n \in \mathbf{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n^2 + 5}$ este rațional.

Soluție. Fie $m \in \mathbf{N}$ astfel încât să avem egalitatea:

$$\sqrt{n^2 + 5} = m \Rightarrow n^2 + 5 = m^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m + n)(m - n) = 5 \Rightarrow m + n = 5, m - n = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 3, n = 2. \text{ Deci valoarea lui } n \text{ este } 2.$$

3. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ numerele de forma $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

Soluție. Dacă n este par, $n = 2k \Rightarrow 5n + 2 = 10k + 2$ și are deci ultima cifră egală cu 2.

Dacă n este impar, $n = 2k + 1 \Rightarrow 5n + 2 = 5(2k + 1) + 2 = 10k + 7$ și are decă ultima cifră egală cu 7.

Numerele de forma $5n + 2$ au ultima cifră 2 sau 7 și nu pot fi pătrate perfecte. Atunci numerele $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Arătați că numere raționale de forma $\sqrt{n + 1}$, unde n este număr natural mai mic decât 10 sunt:

unu două trei patru cinci

2. Arătați că numere iraționale de forma $\sqrt{2n + 1}$, unde n este număr natural pătrat perfect de 2 cifre sunt:

unu două șase patru cinci

3. Calculați $\sqrt{5}$ cu 7 zecimale. Cifra 6 apare printre aceste zecimale de un număr de ori egal cu:

0 1 2 3 4

4. Fie numerele: $\sqrt{16}, \sqrt{99}, \frac{3}{4}, 1,(3), \sqrt{121}, \sqrt{44}, \sqrt{75}$. Dintre acestea, numere iraționale sunt:

unu două trei patru cinci

5. Numărul natural de o cifră n , astfel încât numărul $\sqrt{n + 4}$ să fie rațional este:

3 4 5 6 7

6. Numărul natural de două cifre n , astfel încât numărul $\sqrt{n + 65}$ să fie natural de o cifră este:

13 16 25 46 57

7. Determină toate numerele naturale de 2 cifre n , astfel încât numărul $\sqrt{n + 10}$ să fie rațional. Numărul lor este egal cu:

3 4 5 6 7

8. Numărul natural n pentru care $\sqrt{n^2 + 9}$ este rațional este:

3 4 5 6 7

9. Determină toate numerele naturale n , astfel încât $\sqrt{n + 6}$ să fie rațional și $\sqrt{n + 6} \leq 6$. Numărul lor este egal cu:

3 4 5 6 7

1.1.3 Operații algebrice cu numere reale

Puteri cu exponent întreg.

a) Noțiuni teoretice și exemple

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

- 1) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z) (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
- 2) Comutativitatea: $x + y = y + x (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 3) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x (\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 4) Element opus: $x + (-x) = (-x) + x (\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x .

b) Proprietățile înmulțirii

- 1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz) (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
- 2) Comutativitatea: $xy = yx (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x (\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 4) Element inversabil: $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1 (\forall)x \in \mathbf{R}, x \neq 0$;
numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x .

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

- 1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
 $x(y + z) = xy + xz (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$.

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

- a) $x - y = x + (-y), (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- b) $x : y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$.

d) Formule de calcul prescurtat

- 1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- 2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
- 4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- 5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
- 6) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$$7) (a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc;$$

$$8) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$9) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$10) a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$n \geq 2, n \in \mathbf{N};$$

$$11) a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$n \geq 2, n \in \mathbf{N}, \text{ impar.}$$

e) Alte formule algebrice utile

$$1) a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab;$$

$$2) a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b);$$

$$3) a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a + b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2;$$

$$4) a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4);$$

$$5) a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2);$$

$$6) a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc;$$

$$7) a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$$

$$= \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2];$$

$$8) a) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) =$$

$$= \frac{1}{2} (a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

$$9) (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

f) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$2) a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0;$$

$$3) (a^m)^n = a^{mn};$$

$$4) (ab)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0.$$